Topología

Aplicaciones continuas, homeomorfismos y embebimientos

1. Sea X un conjunto y τ, τ' topologías en X. Demostrar que la aplicación identidad $\mathrm{id} : (X, \tau) \longrightarrow (X, \tau')$, $\mathrm{id}(x) = x$ es continua si y solo si τ es más fina que τ'.

2. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación entre dos espacios topológicos. Demostrar que si $U \subset X$ es abierto y $f|_U$ es continua, entonces f es continua en todos los puntos de U. Poner un ejemplo de una aplicación f cuya restricción a un subespacio sea continua pero que no sea continua algún punto del subconjunto.

3. Sea X un espacio topológico. Demostrar que si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación continua de X en la recta real y $x_0 \in X$ satisface que $f(x_0) > 0$, entonces existe un abierto U que contiene a x_0 tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in U$.

4. Sea X un espacio topológico. Demostrar que una aplicación $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ en la recta real es continua si y solo si $f^{-1}((-\infty, a))$ y $f^{-1}((b, +\infty))$ son abierto para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$.

5. Utilizando el concepto de continuidad demostrar que que el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x(1 + y^5) = 1\}$$

es cerrado en $\mathbb{R}^2$ con la topología usual.

6. Sea X un espacio topológico. Diremos que un subconjunto $A \subset X$ es denso en X si $\overline{A} = X$. Demostrar que si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua y sobreyectiva entre espacios topológicos y $A \subset X$ es denso en X, entonces $f(A)$ es denso en Y.

7. Estudiar la continuidad de las siguientes aplicaciones de la recta de Kolmogoroff en sí misma:

   a) $f(x) = -|x|$.

   b) $g(x) = -x$.

   c) $h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0, \\ 2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

8. Sea X un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto. Se define la *función característica* de E como la función $\chi_A : X \longrightarrow \{0, 1\}$ dada por:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

considerando en $\{0, 1\}$ la topología discreta.

   a) Demostrar que χ_A es continua en un punto x si y solo si $x \notin \mathrm{Fr}(A)$.

   b) Demostrar que χ_A es continua en todo X si y solo si A es abierto y cerrado en X.

9. Demostrar que un espacio topológico X es discreto si y solo si para todo espacio topológico Y toda aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es continua.

10. Demostrar que un espacio topológico X es indiscreto si y solo si para todo espacio topológico Y toda aplicación $f : Y \longrightarrow X$ es continua.

11. Sea X un espacio topológico y $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de abiertos de X tales que $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Sea $\{f_\lambda : U_\lambda \longrightarrow Y\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de aplicaciones continuas tales que

$$f_\lambda|_{U_\lambda\cap U_\mu} = f_\mu|_{U_\lambda\cap U_\mu} \quad \text{para todo } \lambda, \mu \in \Lambda.$$

Demostrar que la *aplicación combinada* $f : X \longrightarrow Y$ dada por

$$f(x) = f_\lambda(x) \quad \text{si } x \in U_\lambda$$

es una aplicación continua.

12. Sea X un espacio topológico y $\{F_1, \ldots, F_n\}$ una familia finita de cerrados de X tales que $X = F_1 \cup \ldots \cup F_n$. Supongamos que para cada i, $f_i : F_i \longrightarrow Y$ es una aplicación continua y que

$$f_i|_{F_i\cap F_j} = f_j|_{F_i\cap F_j} \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, n.$$

Demostrar que la *aplicación combinada* $f : X \longrightarrow Y$ dada por

$$f(x) = f_i(x) \quad \text{si } x \in F_i$$

es una aplicación continua.

13. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua e inyectiva entre dos espacios topológicos. Demostrar que si Y es T_i para algún $i = 0, 1, 2$, entonces X es T_i. Deducir que "ser T_i" es una propiedad topológica.

14. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subespacio de la recta real. Demostrar que la propiedad

"toda función continua $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ alcanza el máximo"

es una propiedad topológica. Deducir que el intervalo $I = [0, 1]$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

15. Encontrar un ejemplo de una aplicación biyectiva y abierta que no sea un homeomorfismo.

16. Demostrar que el cuadrado $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ con la topología usual es homeomorfo a la bola unidad cerrada centrada en el origen de $\mathbb{R}^2$.

17. Estudiar si la recta de Sorgrenfrey $\mathbb{R}_S$ es homeomorfo al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ dotado de la topología inducida por la base

$$\mathcal{B} = \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}.$$

18. Demostrar que $(\mathbb{R}, \tau_{CF})$ no es homeomorfo a la recta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$.

19. Sea Y un conjunto y τ una topología en Y con respecto a la cual Y es T_2. Demostrar que si $f : (Y, \tau_{CF}) \longrightarrow (Y, \tau)$ es continua, entonces f es constante.

20. Considerando la topología usual en el dominio y en el rango, estudiar si las siguientes aplicaciones son embebimientos:

    a) $f : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por
    $$f(t) = (\cos t, \sin t).$$

    b) $g : (0, 3/4) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por
    $$g(t) = (t\sin(1/t), t\cos(1/t))$$
    ¿y si extendemos g a $[0, \frac{3}{4}]$ haciendo $g(0) = 0$?

c) $h : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$h(t) = \left(\frac{\cos(t+\pi/2)}{1+\sin^2(t+\pi/2)}, \frac{\sin(t+\pi/2)\cos(t+\pi/2)}{1+\sin^2(t+\pi/2)} \right).$$

21. Considerando la topología usual en el dominio y en el rango, estudiar si la aplicación $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es un embebimiento

$$h(x) = \begin{cases} (x+1, 0) & \text{si } x \leq 0 \\ \left(\cos \frac{\pi x}{1+x}, \sin \frac{\pi x}{1+x}\right) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

es un embebimiento.

22. Demostrar que la composición de embebimientos es un embebimiento.

23. Sean X e Y espacios topológicos. Una aplicación $h : X \longrightarrow Y$ es un *homeomorfismo local* si para cada punto $x \in X$ existe un entorno abierto $U \in \mathcal{N}_x$ y un entorno abierto $V \in \mathcal{N}_{h(x)}$ tal que $h|_U : U \longrightarrow V$ es un homeomorfismo.

    a) Demostrar que un homeomorfismo local es una aplicación continua y abierta.

    b) Demostrar que la aplicación $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ dada por $t \mapsto p(t) = e^{2\pi i t}$ es un homeomorfismo local.